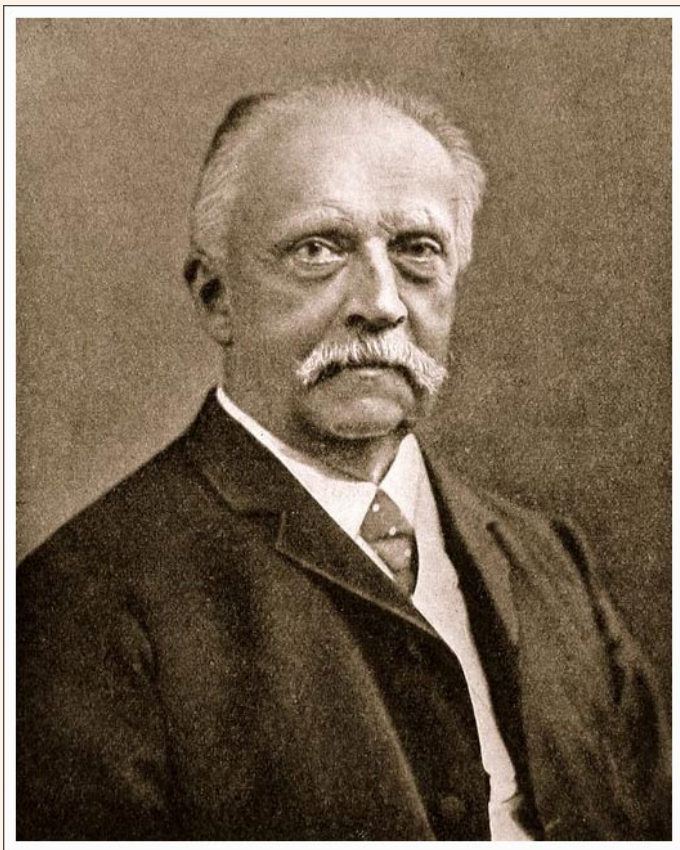




# Wellen und Gleichungen

Manfred Lehn  
Institut für  
Mathematik

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right)$$

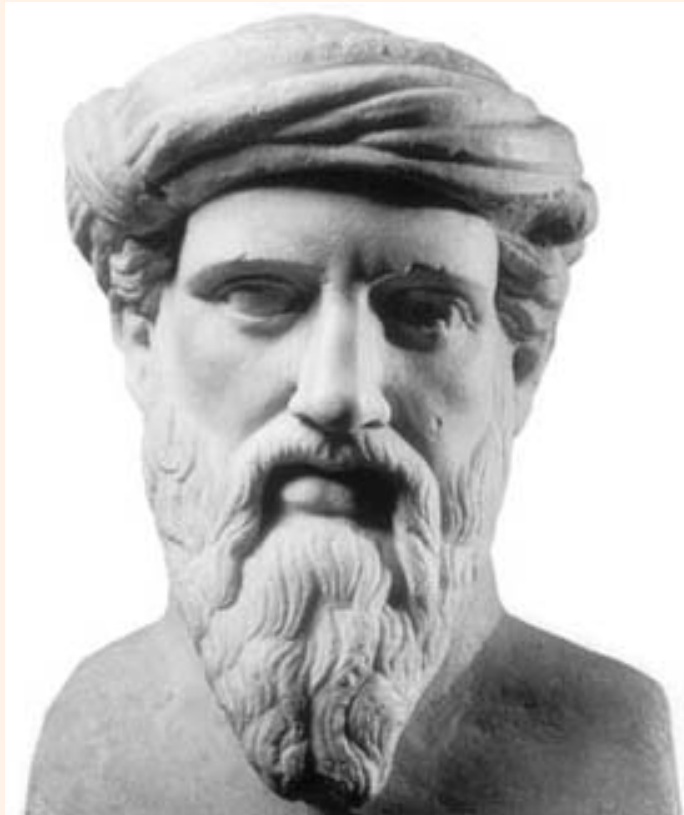


Hermann von Helmholtz  
(1821 – 1894)

*„ In letzter Instanz ist also der Grund  
der von Pythagoras aufgefundenen  
rationellen Verhältnisse in dem  
Satz von Fourier zu finden,  
  
und in gewissem Sinne ist dieser Satz  
als der Urquell des Generalbasses  
zu betrachten.“*

Die Lehre von den Tonempfindungen  
als physiologische Grundlage zu einer  
Theorie der Musik (1862)

Pythagoras (ca 500 v. Chr.)



Austauschstudent, Sektengründer,  
Kommunist, Vegetarier, Philosoph,  
Mathematiker.

Joseph Fourier (1768 - 1830)



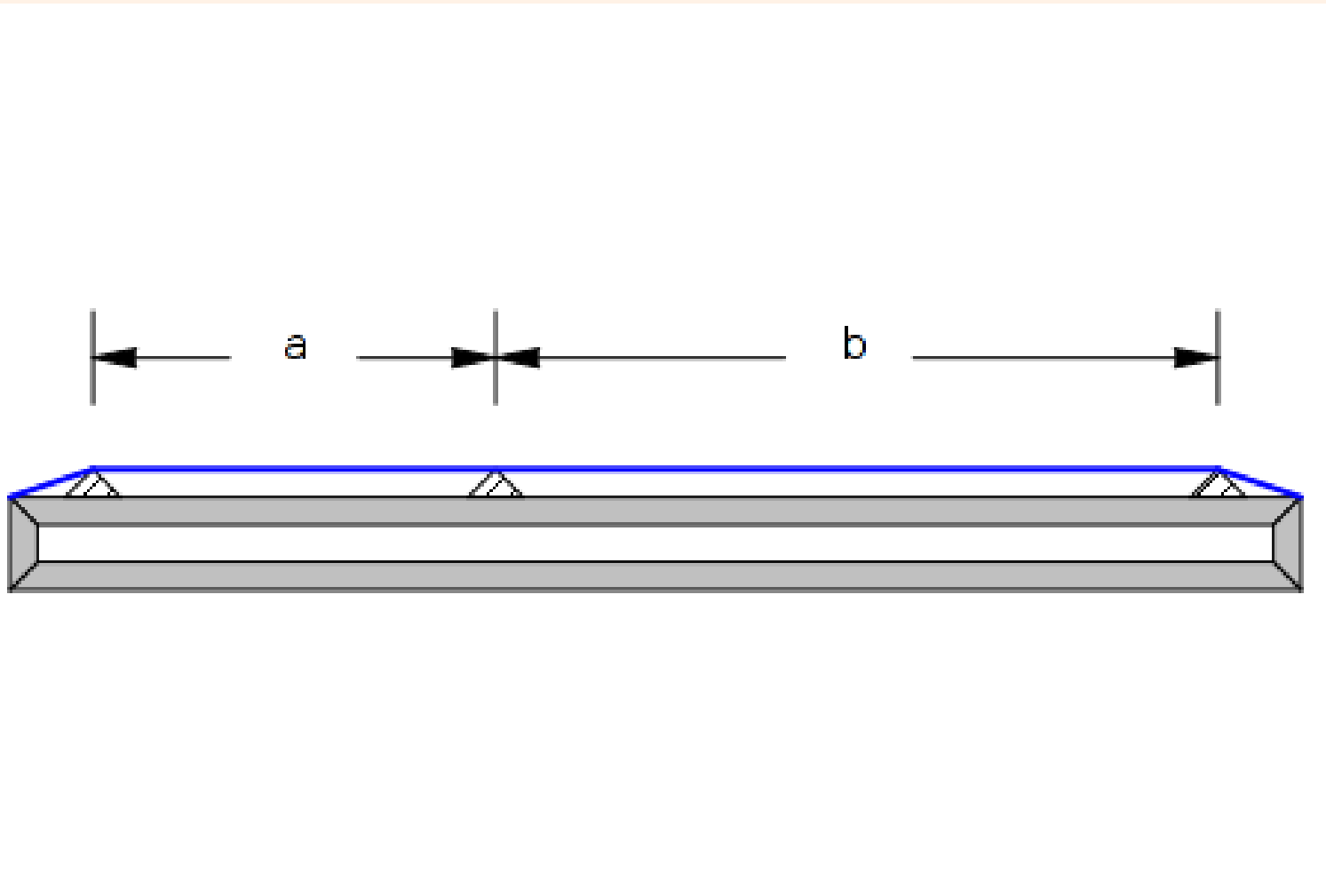
Priesteranwärter, Revolutionär,  
Mathematiklehrer, Politiker,  
Administrator, Mathematiker.

Pythagoras:

Experimente am Monochord

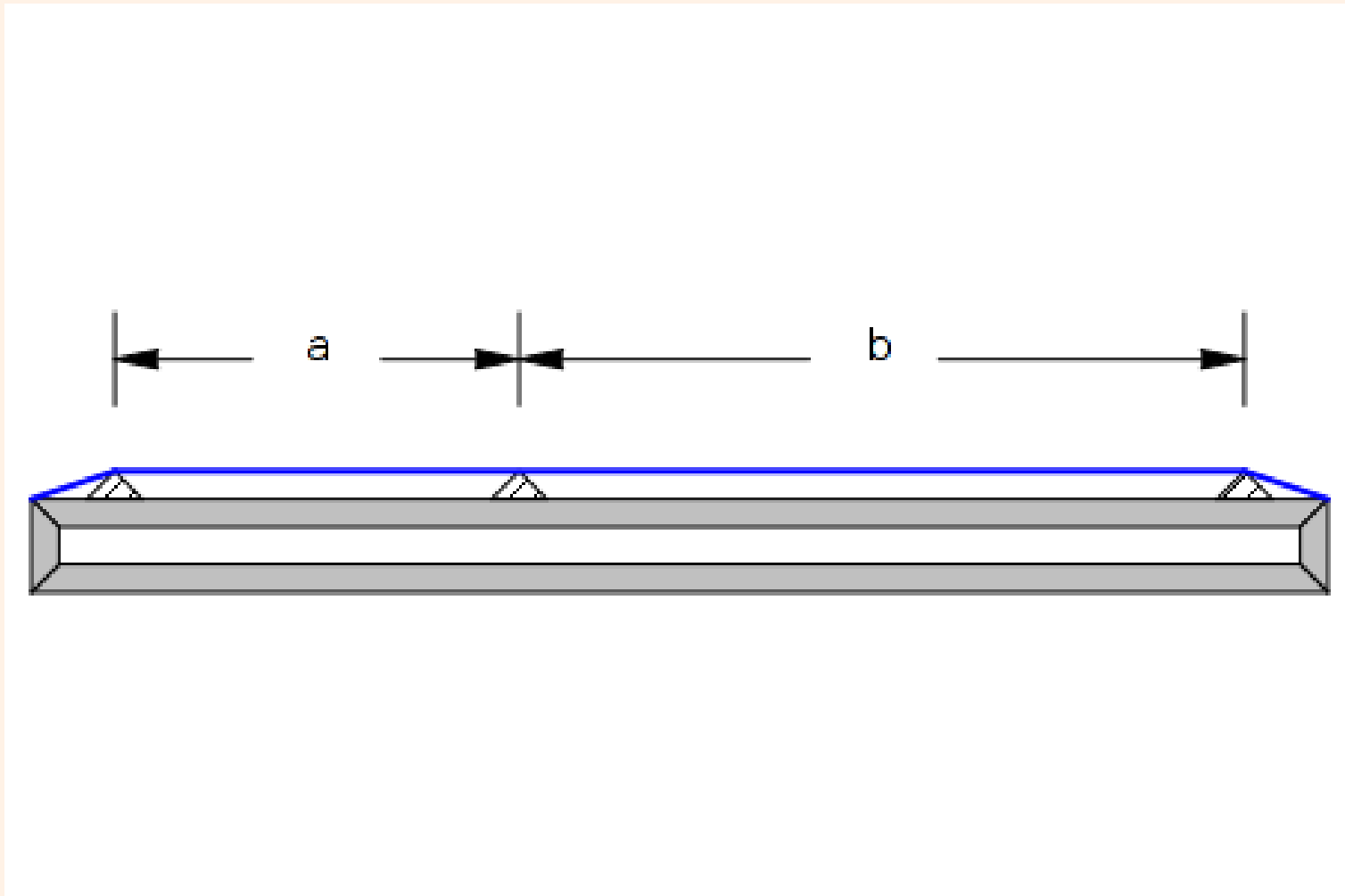
griech: Monochord = „eine Saite“





„Die beiden Saiten klingen harmonisch, wenn  
 $a : b =$  Verhältnis kleiner ganzer Zahlen.“

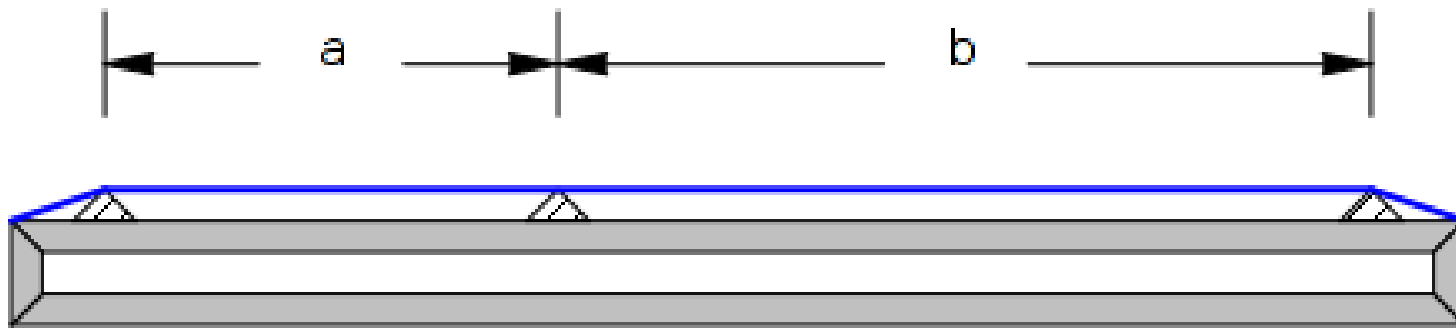
zum Beispiel 1:2 oder 2:3



„Die beiden Saiten klingen harmonisch, wenn

$a : b = \text{Verhältnis kleiner ganzer Zahlen.}$ “

zum Beispiel 1:2 oder 2:3



„Alles ist Zahl!“

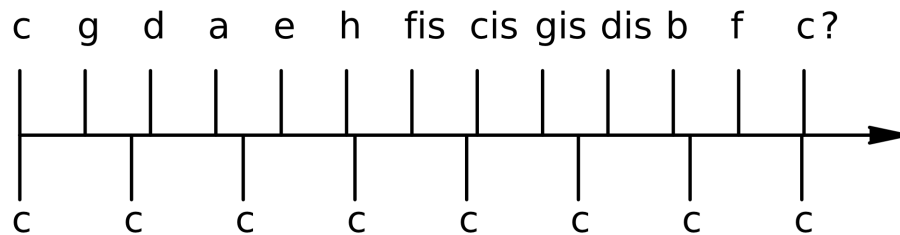
# Reihe der Obertöne

| Verhältnis | Ton        | Frequenz | Tonintervall     |
|------------|------------|----------|------------------|
| 1:1        | <i>C</i>   | 66       | } Oktave 1:2     |
| 1:2        | <i>c</i>   | 132      |                  |
| 1:3        | <i>g</i>   | 198      | } Quinte 2:3     |
| 1:4        | <i>c'</i>  | 264      |                  |
| 1:5        | <i>e'</i>  | 330      | } große Terz 4:5 |
| 1:6        | <i>g'</i>  | 396      |                  |
| 1:7        | <i>b'_</i> | 462      | Naturseptime 4:7 |
| 1:8        | <i>c''</i> | 528      |                  |



# Probleme der reinen Quintenstimmung:

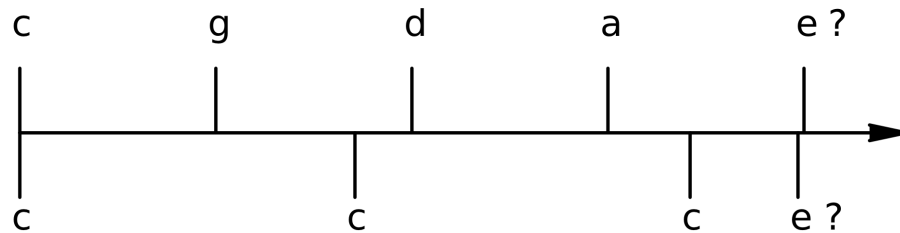
## 1. zwölf Quinten $\neq$ sieben Oktaven



Pythagoräisches Komma

$$\frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{531.441}{524.288} \approx 1,0136$$

## 2. fünf Quinten $\neq$ zwei Oktaven und große Terz

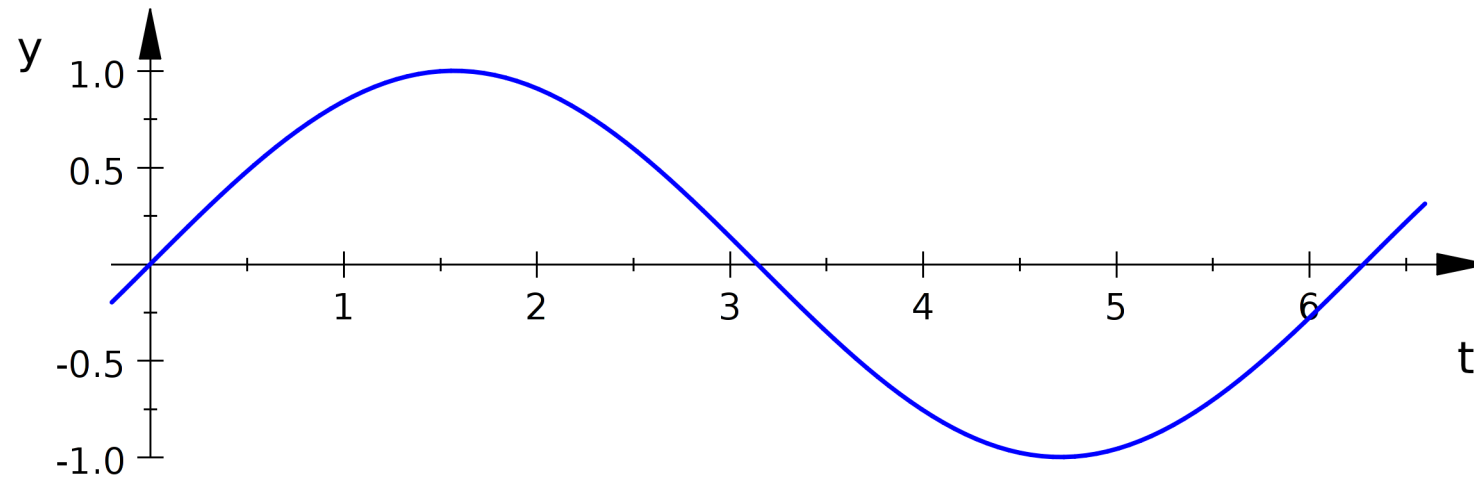


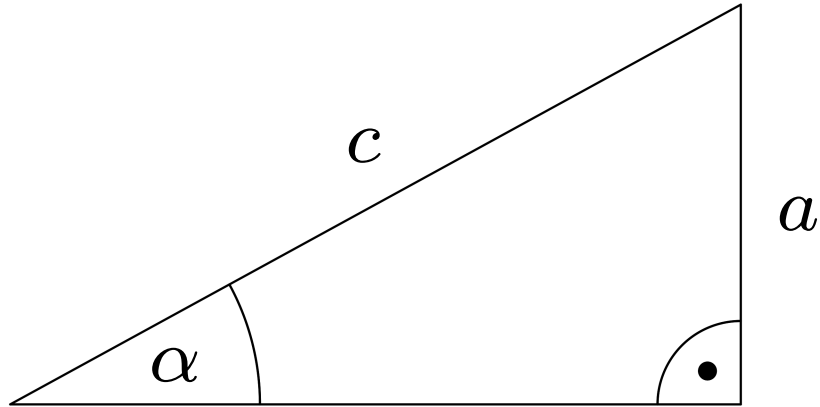
Diatonisches Komma

$$\frac{3^4}{2^{4.5}} = \frac{81}{80} \approx 1,0125$$

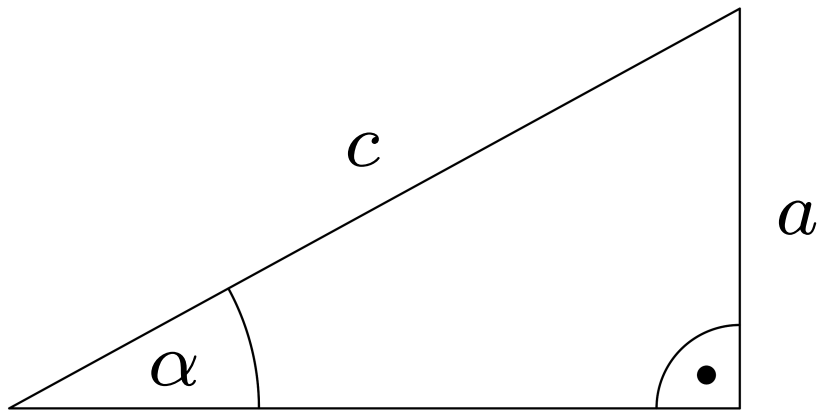
Der eigentliche Held der Geschichte:

**Der Sinus**

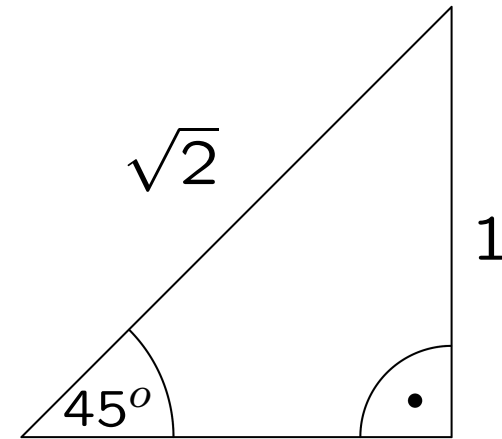




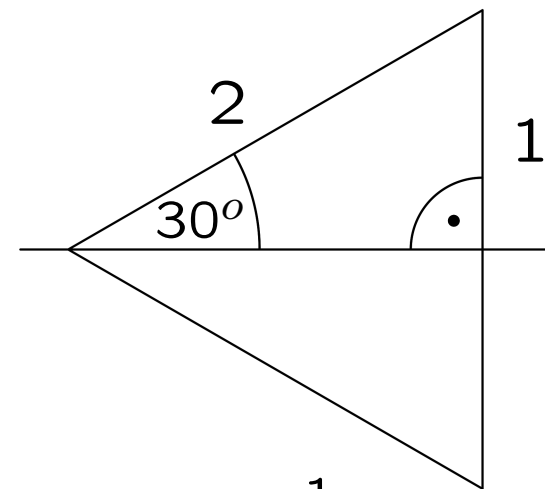
$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$$



$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$$



$$\sin(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

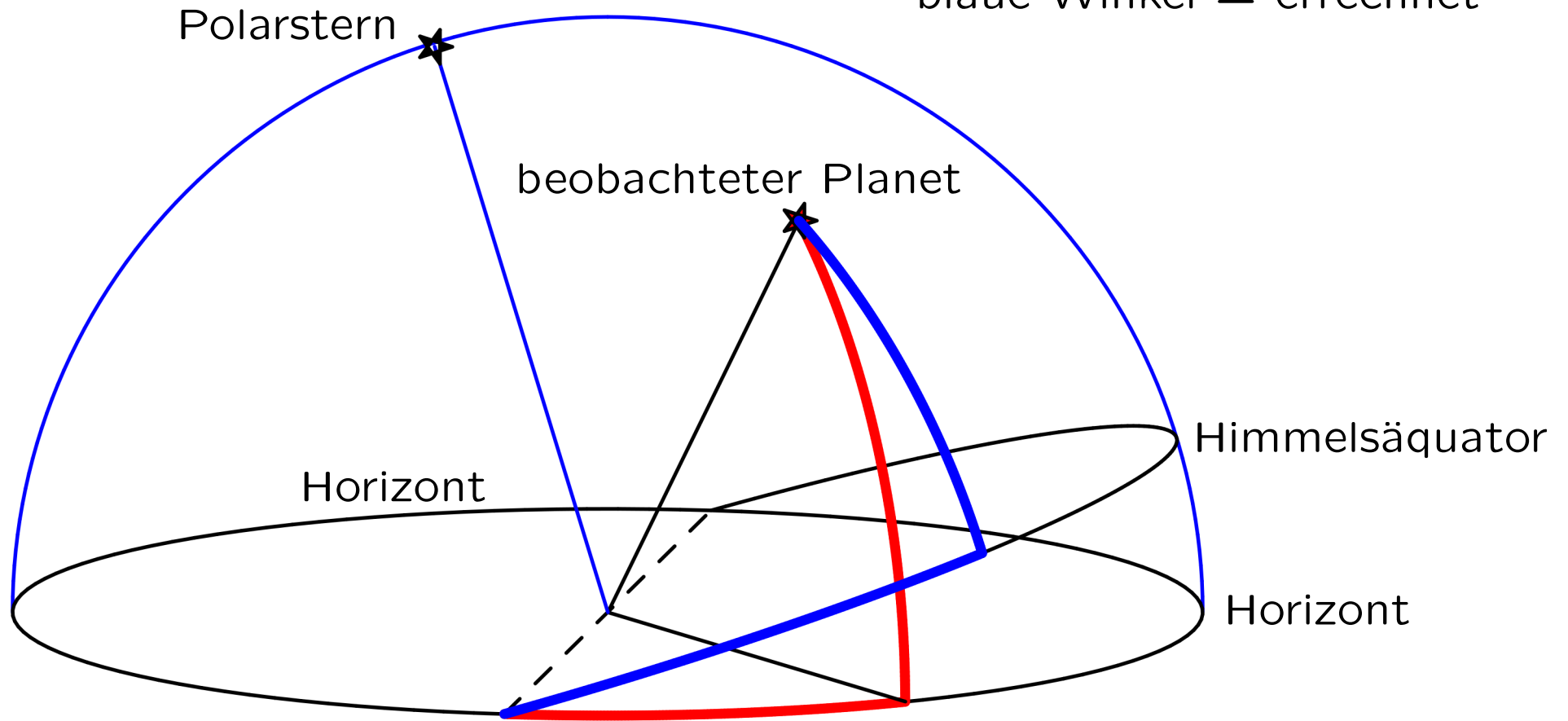


$$\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$$

# Sphärische Trigonometrie in der Astronomie

rote Winkel = gemessen

blaue Winkel = errechnet



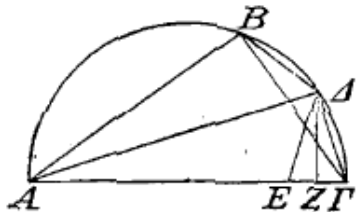
# Klaudios Ptolemaios

(ca. 90 - 168 n. Chr.)

## Syntaxis Mathematica

(arabischer Titel: Almagest)

πάλιν προκείσθω δοθείσης τινός εὐθείας ἐν κύκλῳ τὴν ὑπὸ τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτετινομένης περιφερείας εὐθείαν εὐρεῖν. καὶ ἔστω ἡμικύκλιον τὸ  $AB\Gamma$  ἐπὶ διαμέτρου τῆς

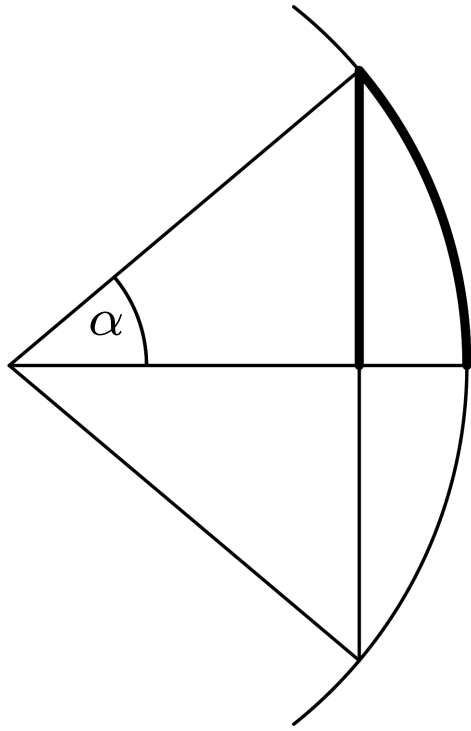


$A\Gamma$  καὶ δοθείσα εὐθεῖα ἡ  $\Gamma B$ , καὶ ἡ  $\Gamma B$  περιφέρεια δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ  $\Delta$ , καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ  $AB$ ,  $A\Delta$ ,  $B\Delta$ ,  $\Delta\Gamma$ , καὶ ἀπὸ τοῦ  $\Delta$  ἐπὶ τὴν  $A\Gamma$  κάθετος ἤχθω ἡ  $\Delta Z$ . λέγω,

ὅτι ἡ  $Z\Gamma$  ἡμίσειά ἐστι τῆς τῶν  $AB$  καὶ  $A\Gamma$  ὑπεροχῆς. κείσθω γὰρ τῇ  $AB$  ἴση ἡ  $AE$ , καὶ ἐπε-

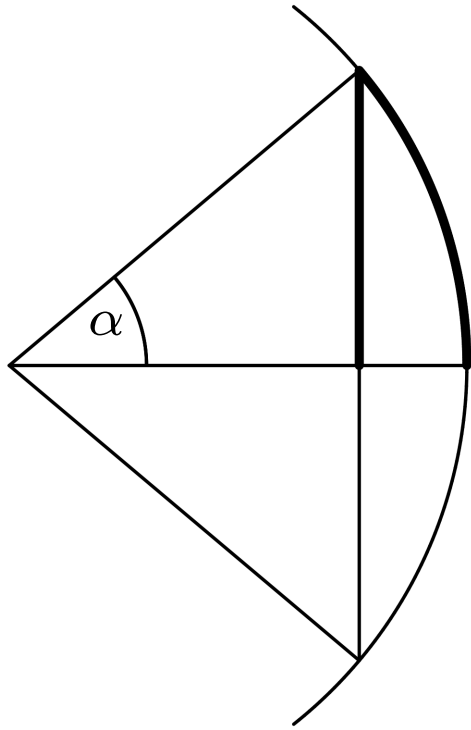
ια'. Κανόνιον τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν.

|    | περιφε-<br>ρειῶν      | εὐθειῶν |    |    | ἑξηκοστῶν |   |   |    |
|----|-----------------------|---------|----|----|-----------|---|---|----|
|    |                       |         |    |    |           |   |   |    |
| 5  | $\Lambda'$            | ο       | λα | κε | ο         | α | β | ν  |
|    | α                     | α       | β  | ν  | ο         | α | β | ν  |
|    | $\alpha\Lambda'$      | α       | λδ | ιε | ο         | α | β | ν  |
|    | β                     | β       | ε  | μ  | ο         | α | β | ν  |
|    | $\beta\Lambda'$       | β       | λξ | δ  | ο         | α | β | μη |
|    | γ                     | γ       | η  | κη | ο         | α | β | μη |
| 10 | $\gamma\Lambda'$      | γ       | λθ | νβ | ο         | α | β | μη |
|    | δ                     | δ       | ια | ις | ο         | α | β | μξ |
|    | $\delta\Lambda'$      | δ       | μβ | μ  | ο         | α | β | μξ |
|    | ε                     | ε       | ιδ | δ  | ο         | α | β | μς |
|    | $\epsilon\Lambda'$    | ε       | με | κξ | ο         | α | β | με |
|    | ς                     | ς       | ις | μθ | ο         | α | β | μδ |
| 15 | $\varsigma\Lambda'$   | ς       | μη | ια | ο         | α | β | μγ |
|    | ξ                     | ξ       | ιθ | λγ | ο         | α | β | μβ |
|    | $\xi\Lambda'$         | ξ       | ν  | νδ | ο         | α | β | μα |
| 20 | η                     | η       | κβ | ιε | ο         | α | β | μ  |
|    | $\eta\Lambda'$        | η       | νγ | λε | ο         | α | β | λθ |
|    | θ                     | θ       | κδ | νρ | ο         | α | β | λη |
| 25 | $\theta\Lambda'$      | θ       | νς | ιγ | ο         | α | β | λξ |
|    | ι                     | ι       | κξ | λβ | ο         | α | β | λε |
|    | $\iota\Lambda'$       | ι       | νη | μθ | ο         | α | β | λγ |
|    | ια                    | ια      | λ  | ε  | ο         | α | β | λβ |
|    | $\iota\alpha\Lambda'$ | ιβ      | α  | κα | ο         | α | β | λ  |
|    | ιβ                    | ιβ      | λβ | λς | ο         | α | β | κη |



$$2 \sin(\alpha) = \text{chord}(2\alpha)$$

1. In nachhellenistischer Zeit in **Indien**:  
Übergang von Sehnen zu Halbsehnen  
Sanskrit: (ardha-)jya = (Halb-)sehne, synonym. jiva
2. Ins Arabische übernommen als Lehnwort: *jiba*
3. Verwechselt mit arabisch *jaib* = Bucht, Busen und übersetzt ins Lateinische als *sinus*



$$2 \sin(\alpha) = \text{chord}(2\alpha)$$

1. In nachhellenistischer Zeit in **Indien**:  
Übergang von Sehnen zu Halbsehnen  
Sanskrit: (ardha-)jya = (Halb-)sehne, synonym. *jiva*
2. Ins Arabische übernommen als Lehnwort: *jiba*
3. Verwechselt mit arabisch *jaib* = Bucht, Busen und übersetzt ins Lateinische als *sinus*

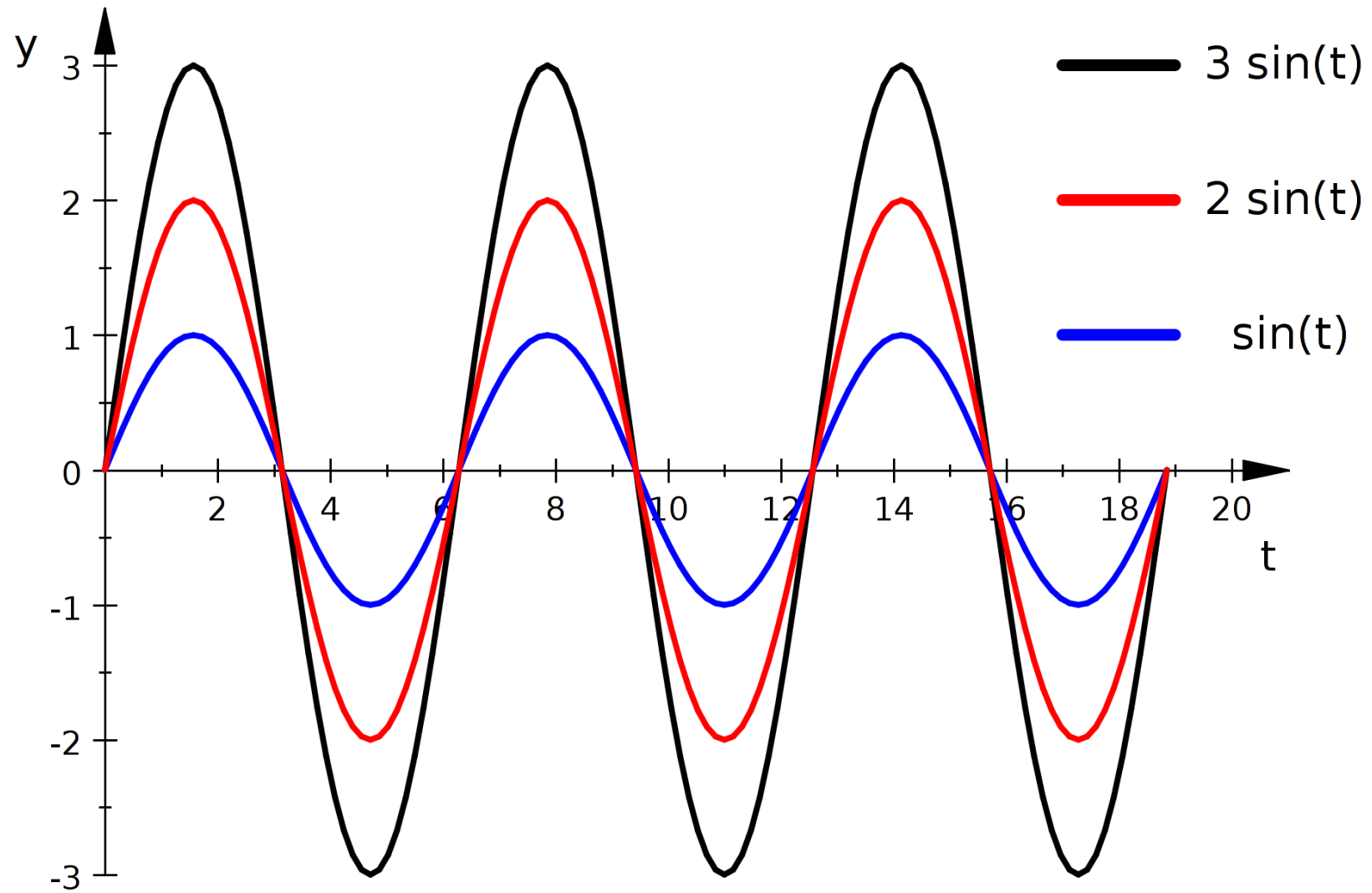
Madhava von Sangamagrama (ca. 1350 – 1425):

$$\sin(\alpha) = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \dots$$

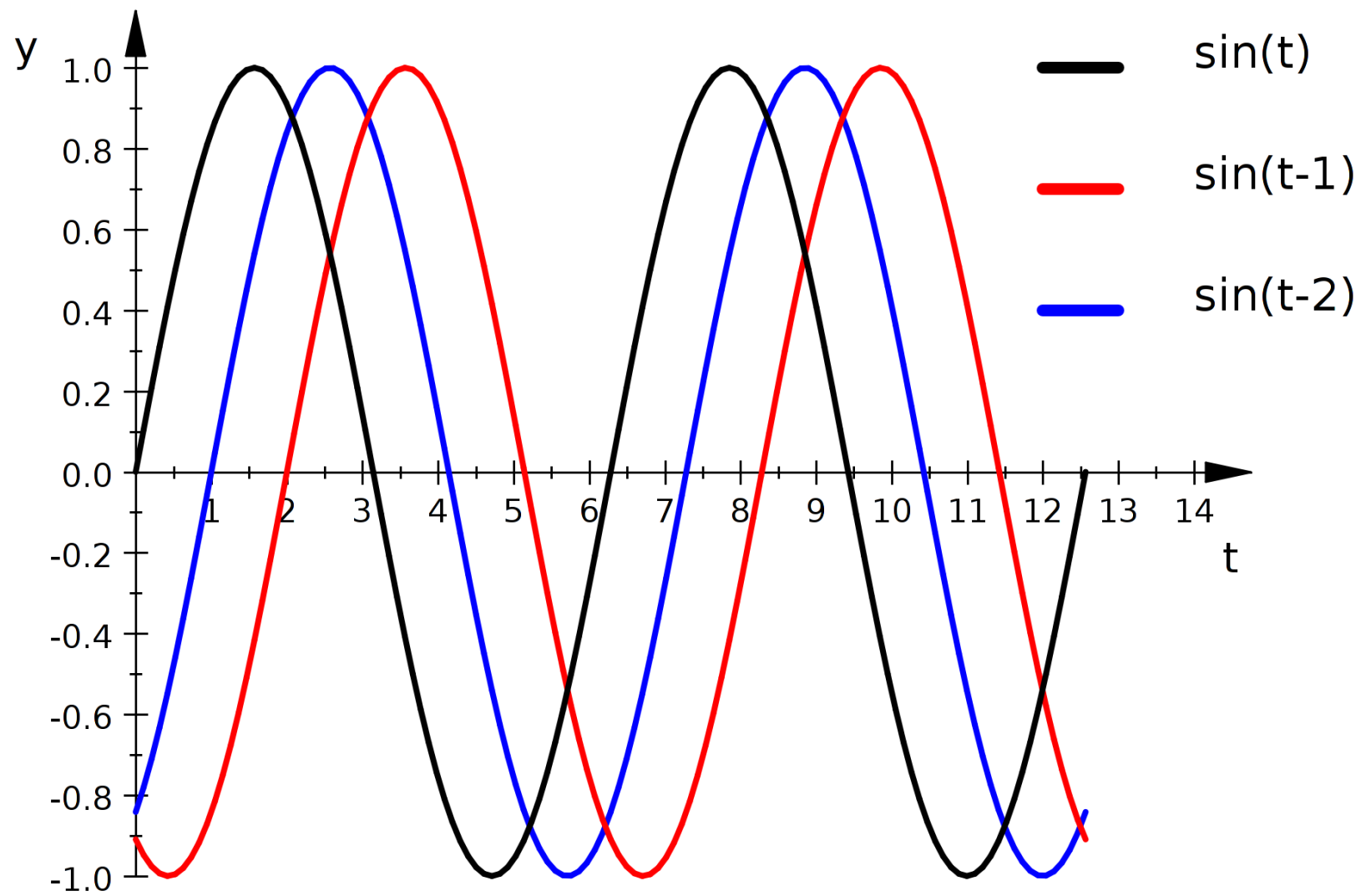




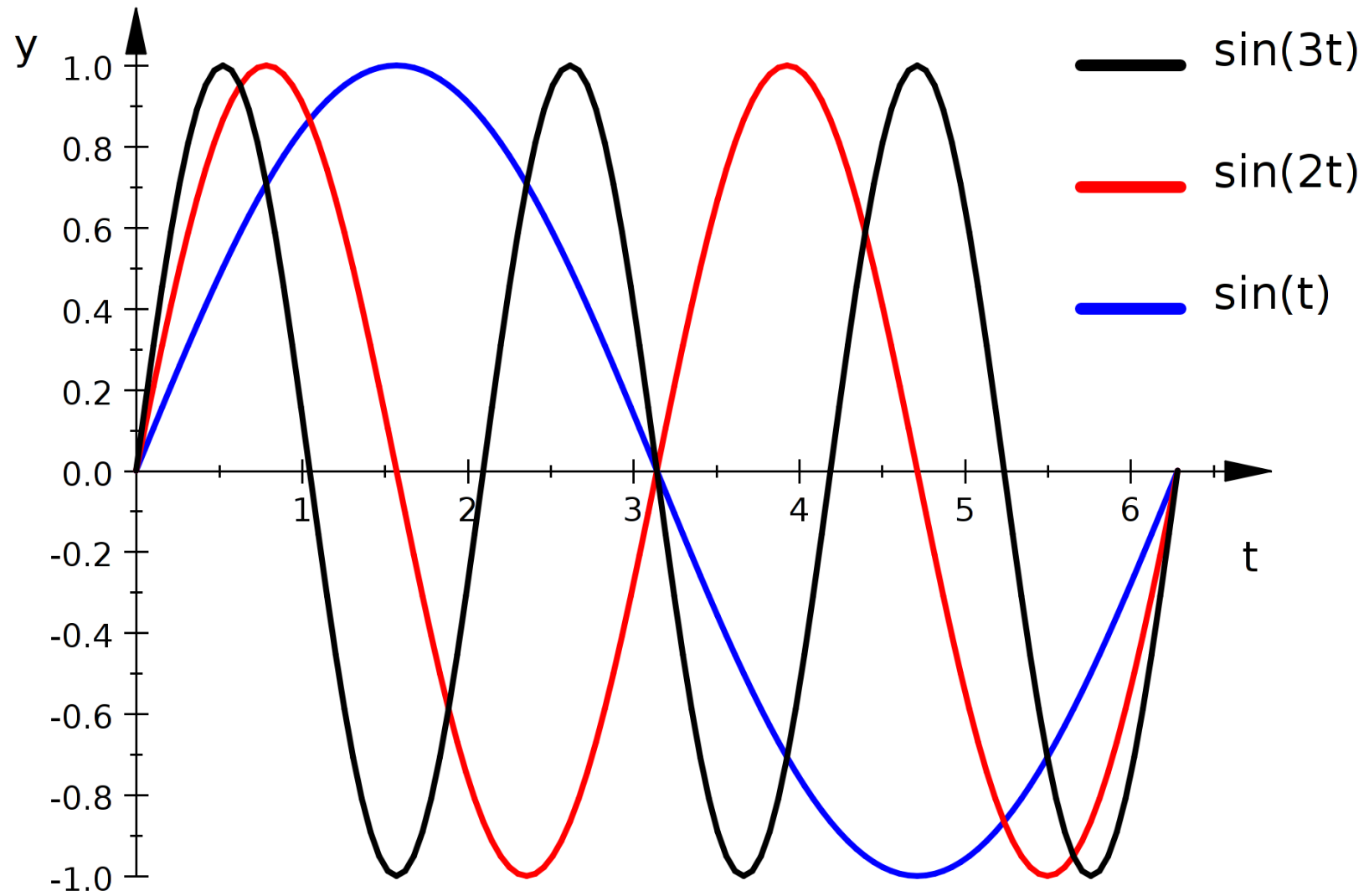
# 1. Amplitude



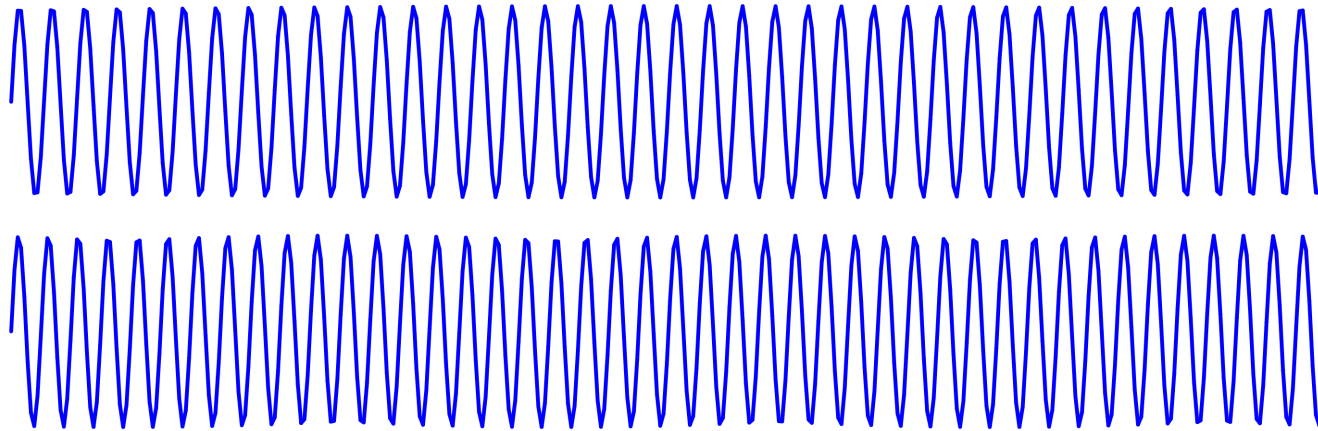
## 2. Phase



### 3. Frequenz



# Überlagerung zweier Schwingungen von ähnlicher Frequenz ...

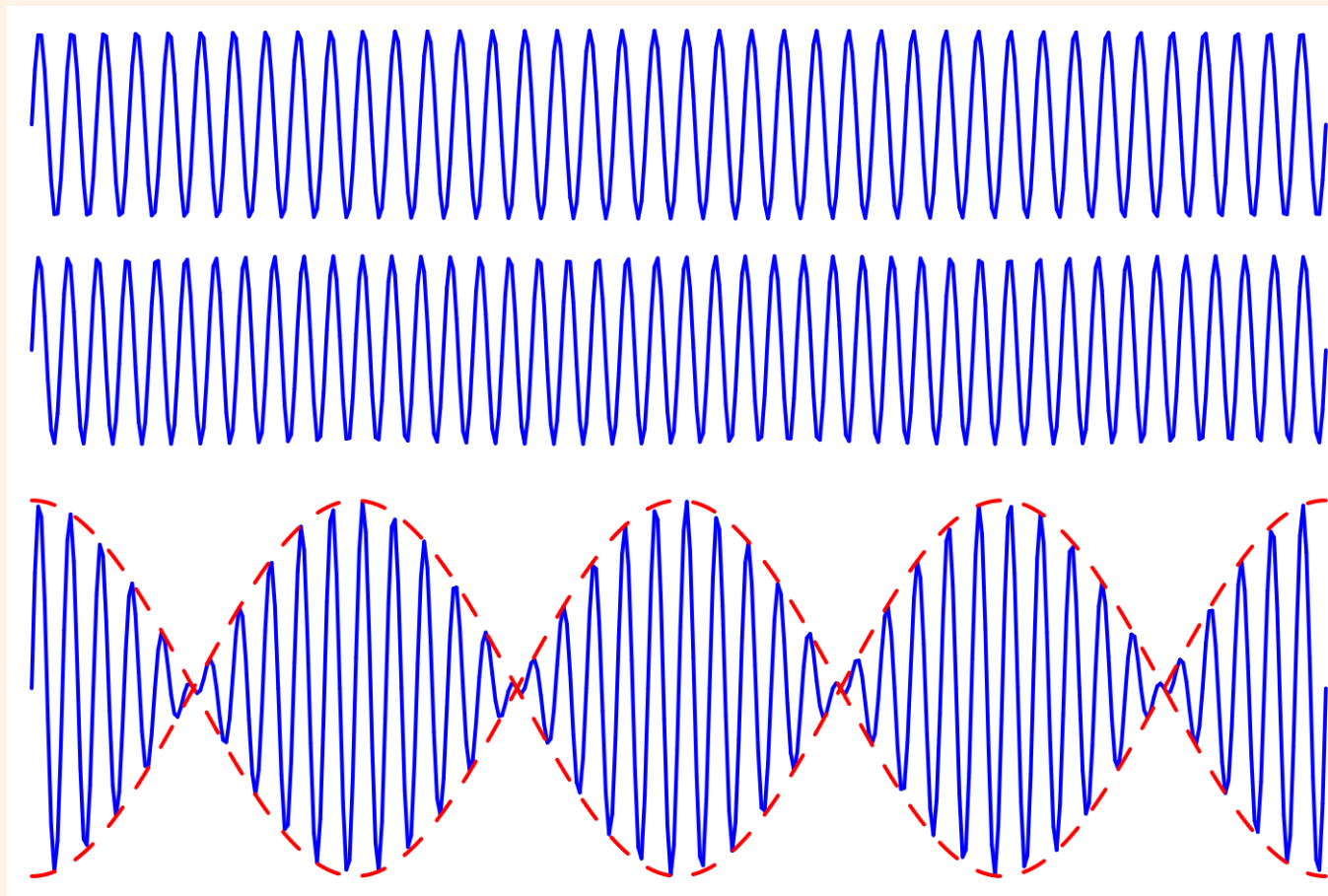


100 Hz

110 Hz

# Überlagerung zweier Schwingungen von ähnlicher Frequenz ...

... führt zu Schwebungen



100 Hz

110 Hz

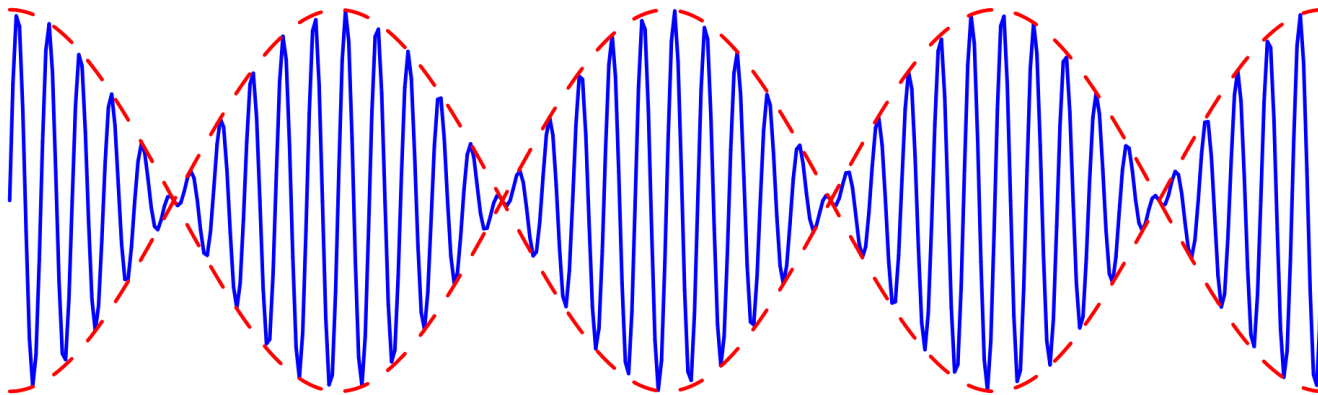
Schwebungsfrequenz

$$\frac{110 - 100}{2} \text{ Hz} = 5 \text{ Hz}$$

# Überlagerung zweier Schwingungen von ähnlicher Frequenz ...

... führt zu Schwebungen

$$\sin(\omega t) + \sin(\omega' t) = 2 \sin\left(\frac{\omega + \omega'}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega - \omega'}{2} t\right)$$



100 Hz

110 Hz

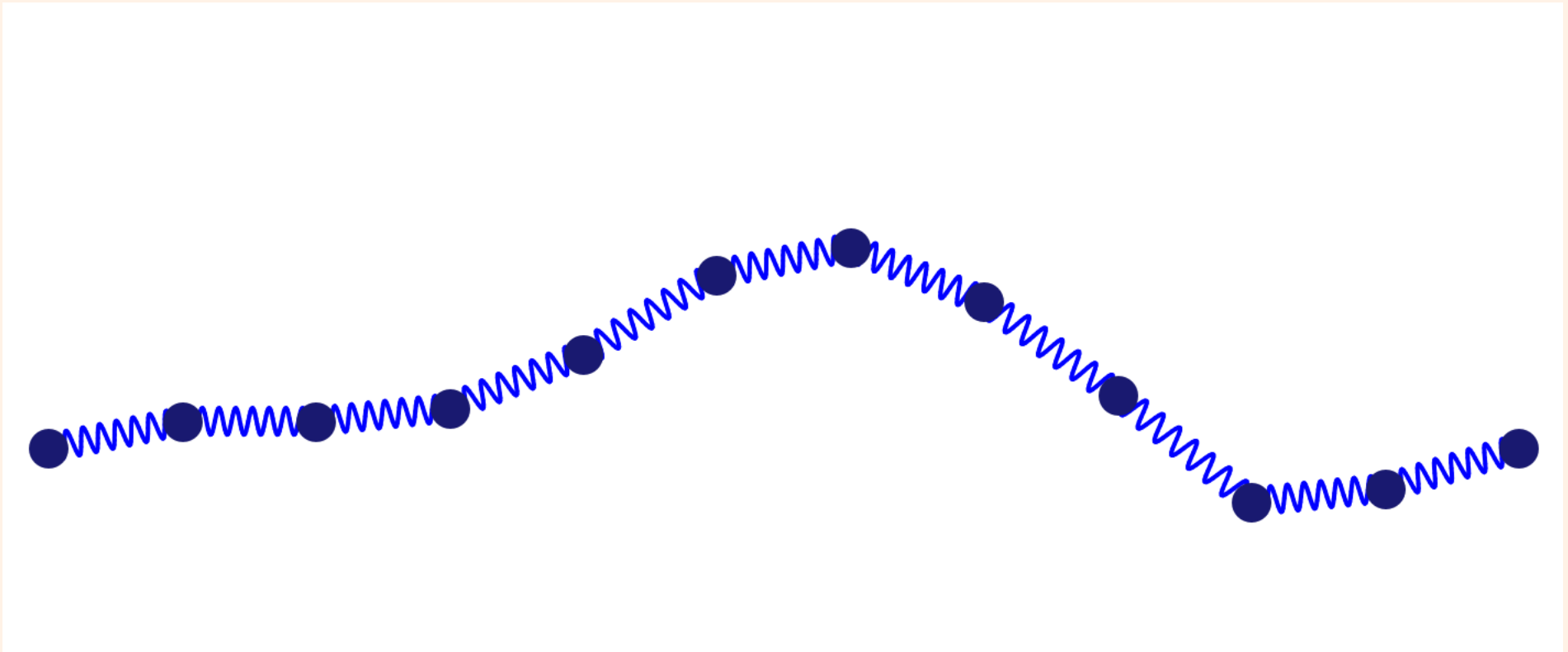
Schwebungsfrequenz

$$\frac{110 - 100}{2} \text{ Hz} = 5 \text{ Hz}$$

Die Wellengleichung:

$$f_{tt} = f_{xx}$$

Beschleunigung = Krümmung

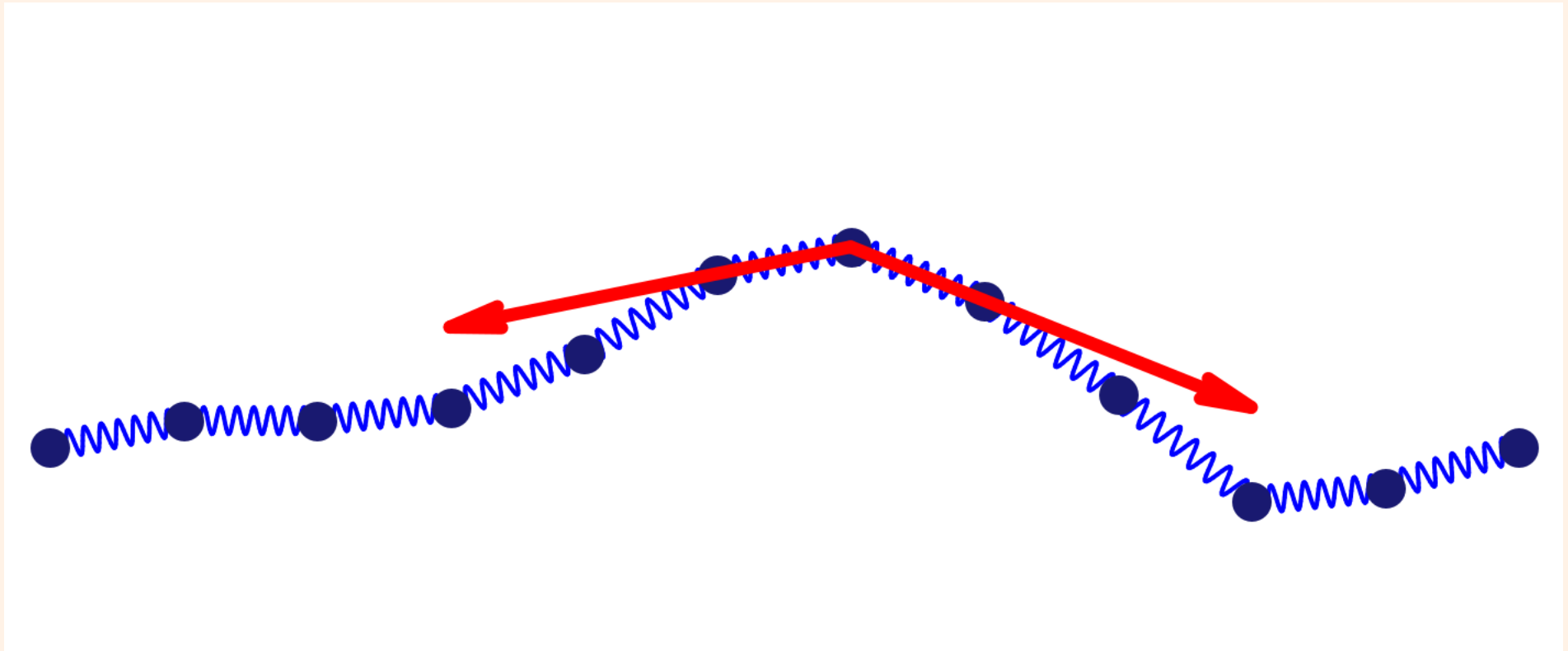




Die Wellengleichung:

$$f_{tt} = f_{xx}$$

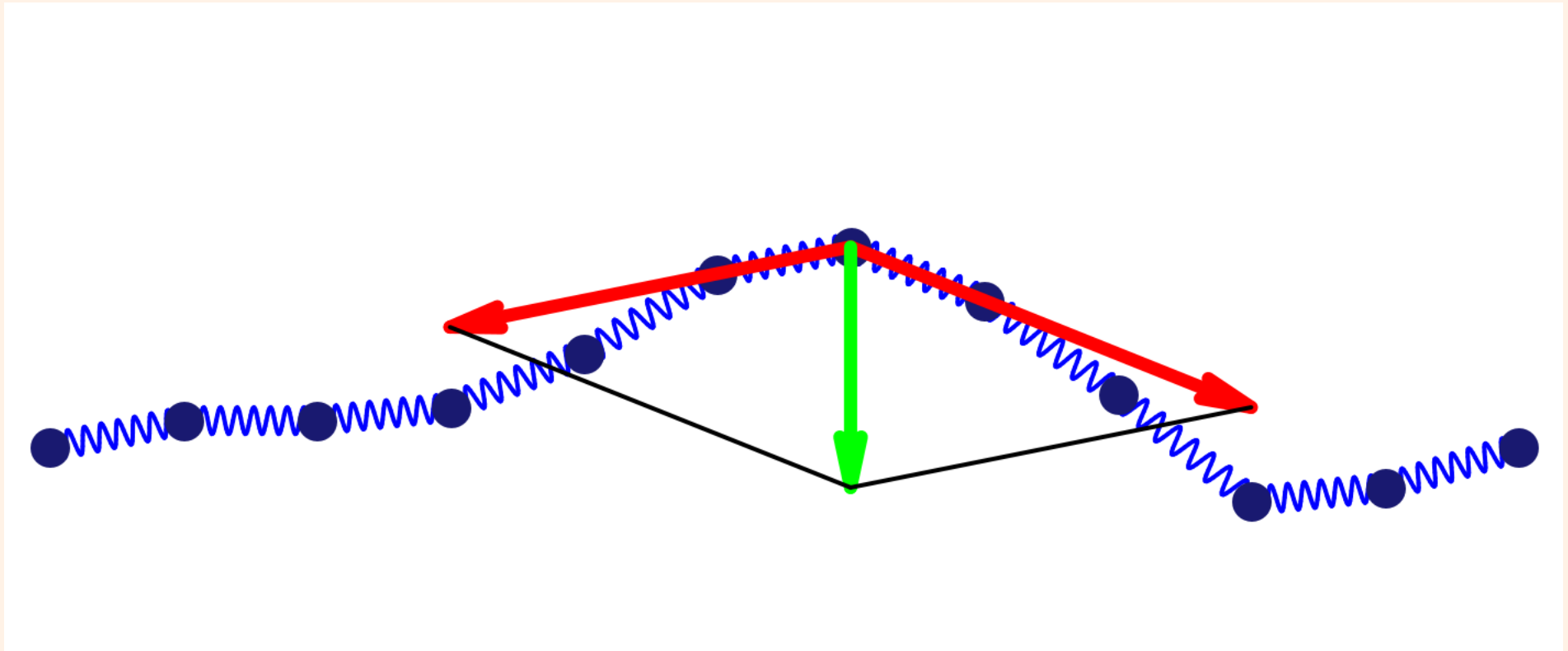
Beschleunigung = Krümmung



Die Wellengleichung:

$$f_{tt} = f_{xx}$$

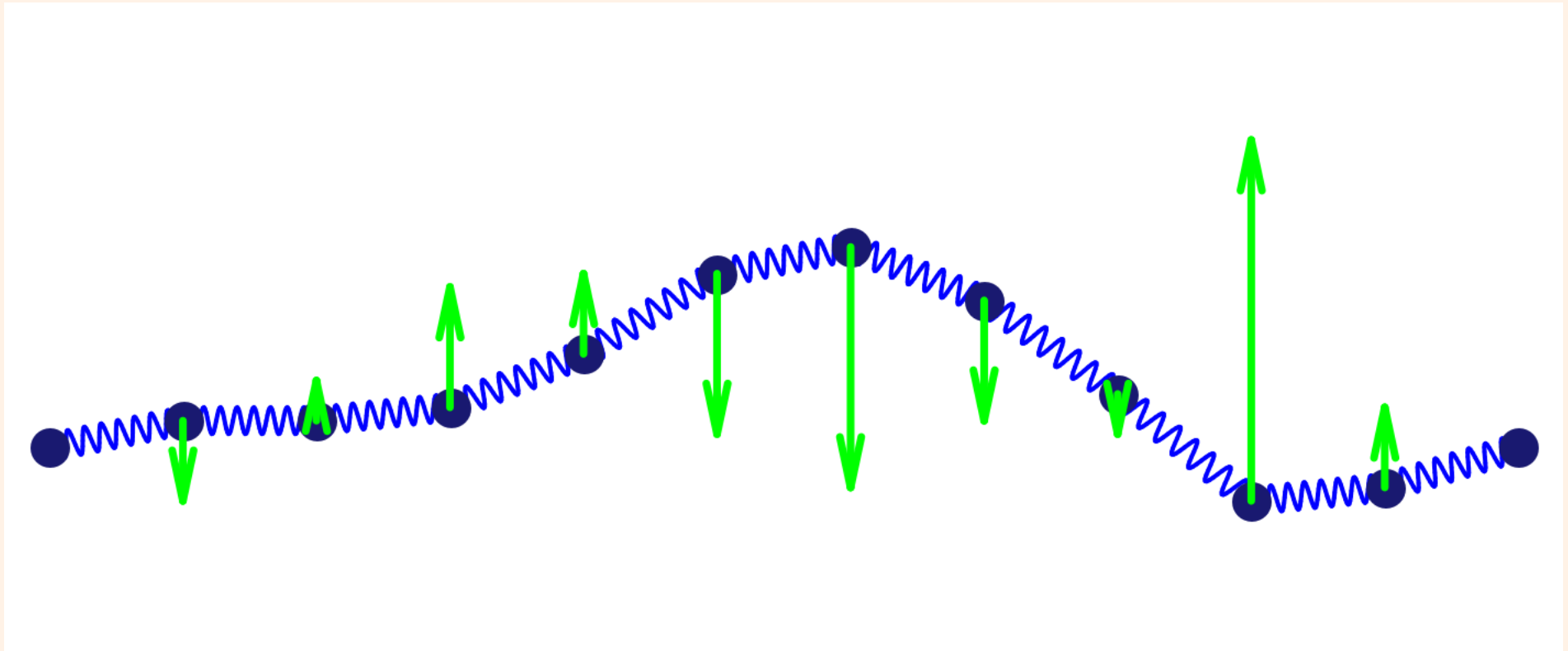
Beschleunigung = Krümmung



Die Wellengleichung:

$$f_{tt} = f_{xx}$$

Beschleunigung = Krümmung



Der Sinus ist eine *Eigenfunktion* der Wellengleichung:

im Gegensatz zu dieser Funktion

Grundton

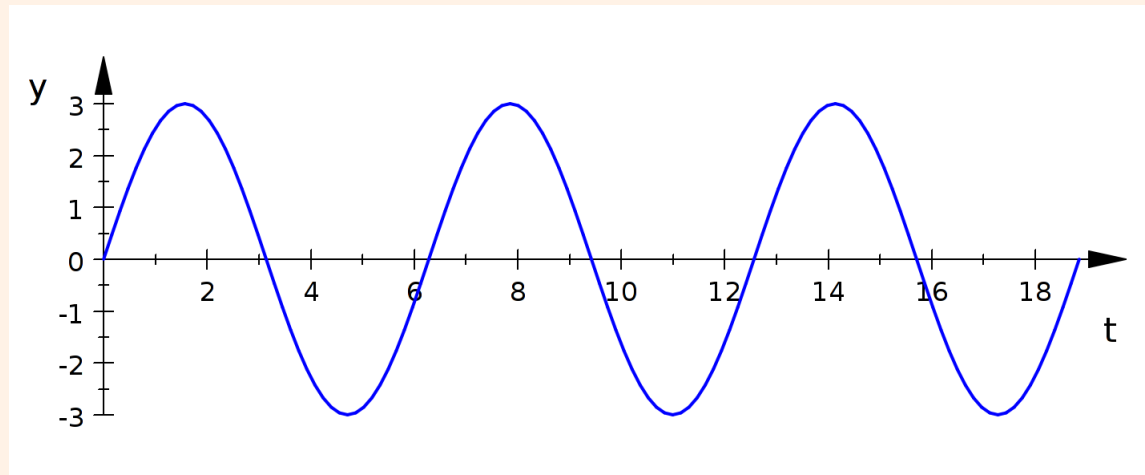
1. Oktave

Duodezime (Quinte)

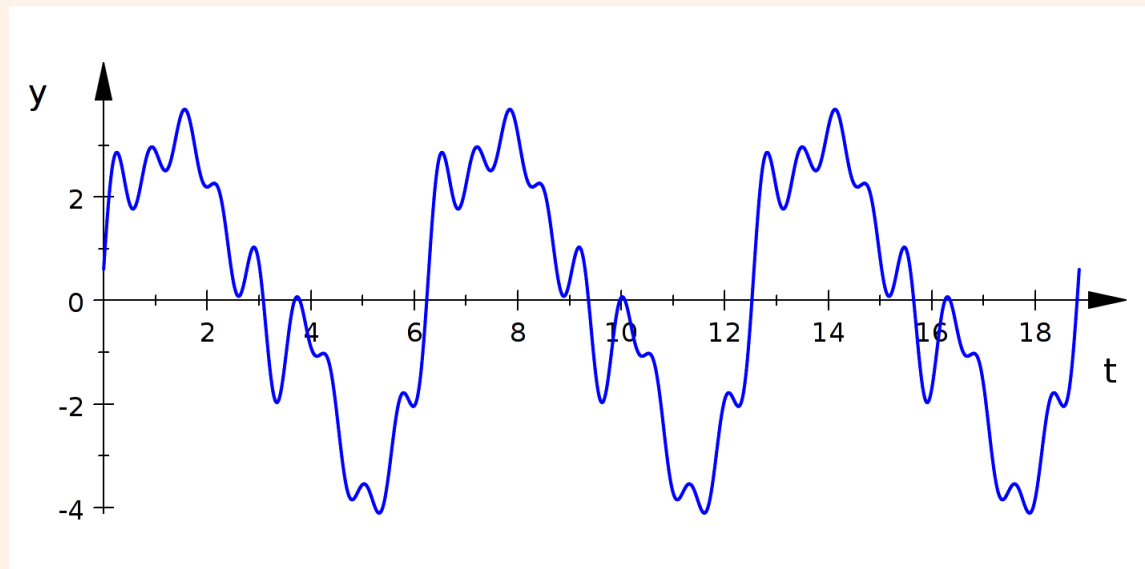
2. Oktave

Schwingende Membran (z.B. Pauke) mit den ersten vier (anharmonischen) Eigenschwingungen

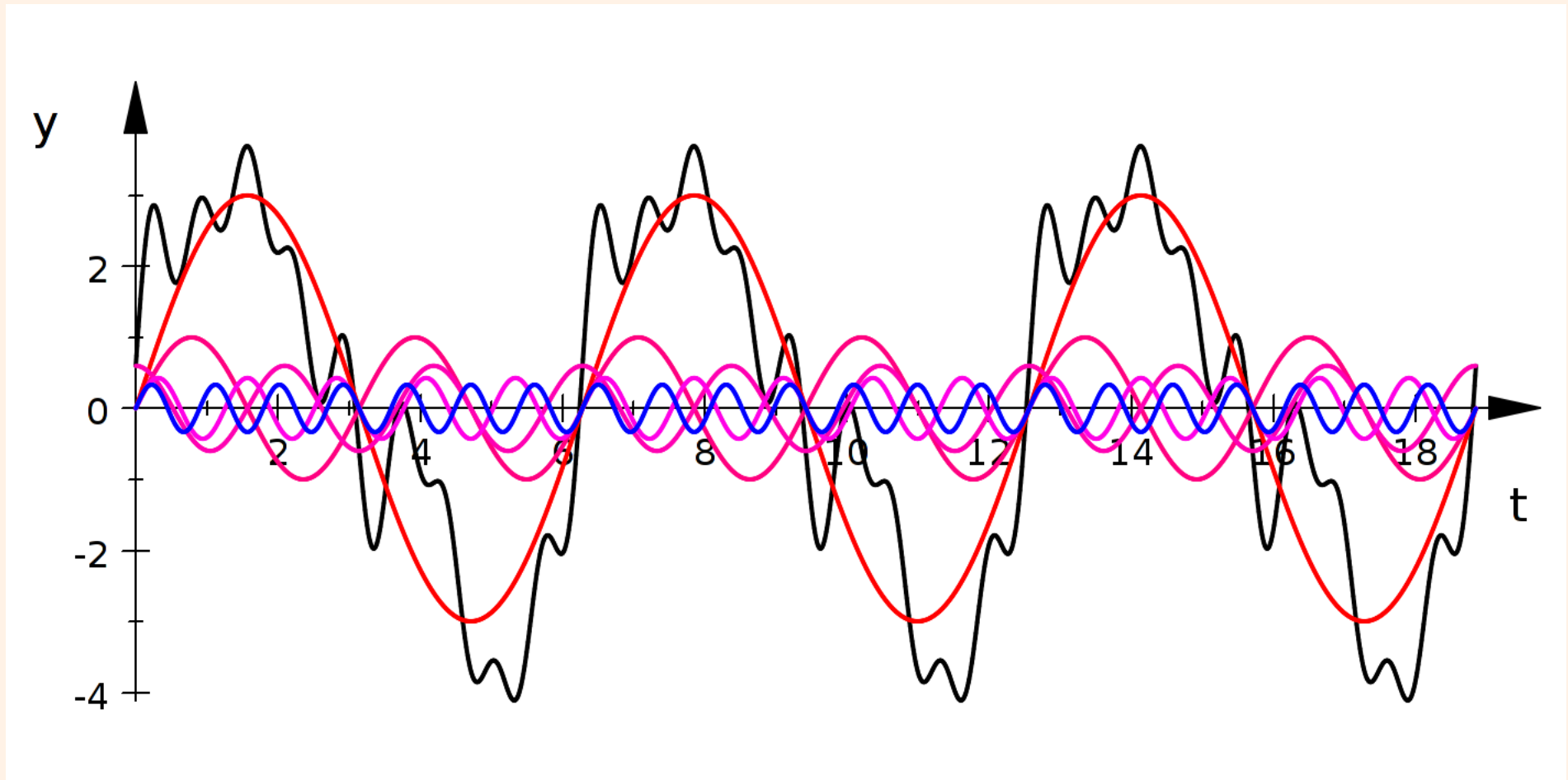
**Ton =**  
reine Sinusschwingung



**Klang =**  
allgemeine periodische  
Schwingung

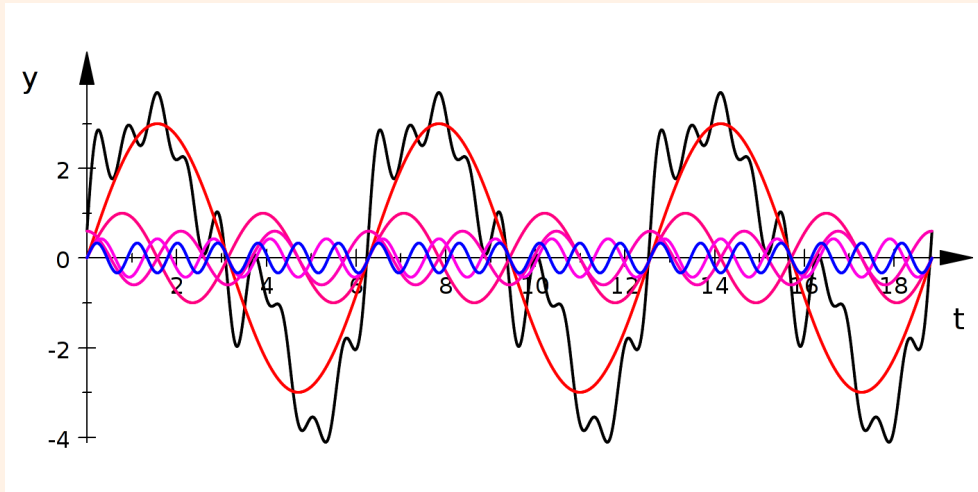


# Fourierzerlegung eines Klangs

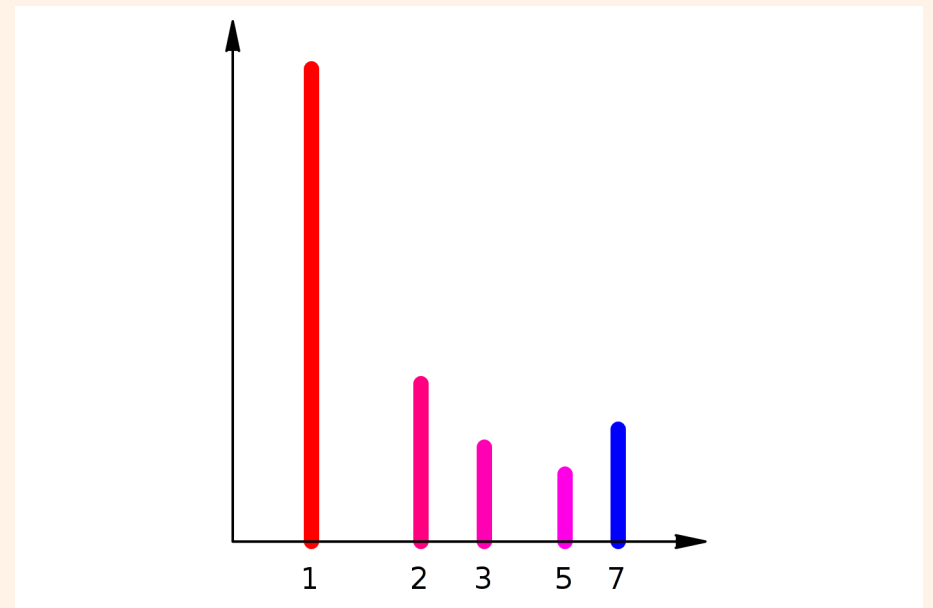




**Satz von Fourier:** Jede periodische Funktion läßt sich als unendliche Summe von Sinus- und Cosinusfunktionen schreiben



Klanganalyse durch Angabe des **Obertonspektrums**





## Joseph Fourier

\* 21.3.1768 † 16.5.1830

1797 Nachfolger von Laplace  
an der Ecole Polytechnique

1798 Napoleon überfällt Ägypten

Gouverneur von Unterägypten  
und Sekretär des Institut d'Egypte

1802 - 1815 Préfet de l'Isère

- Université Royale de Grenoble

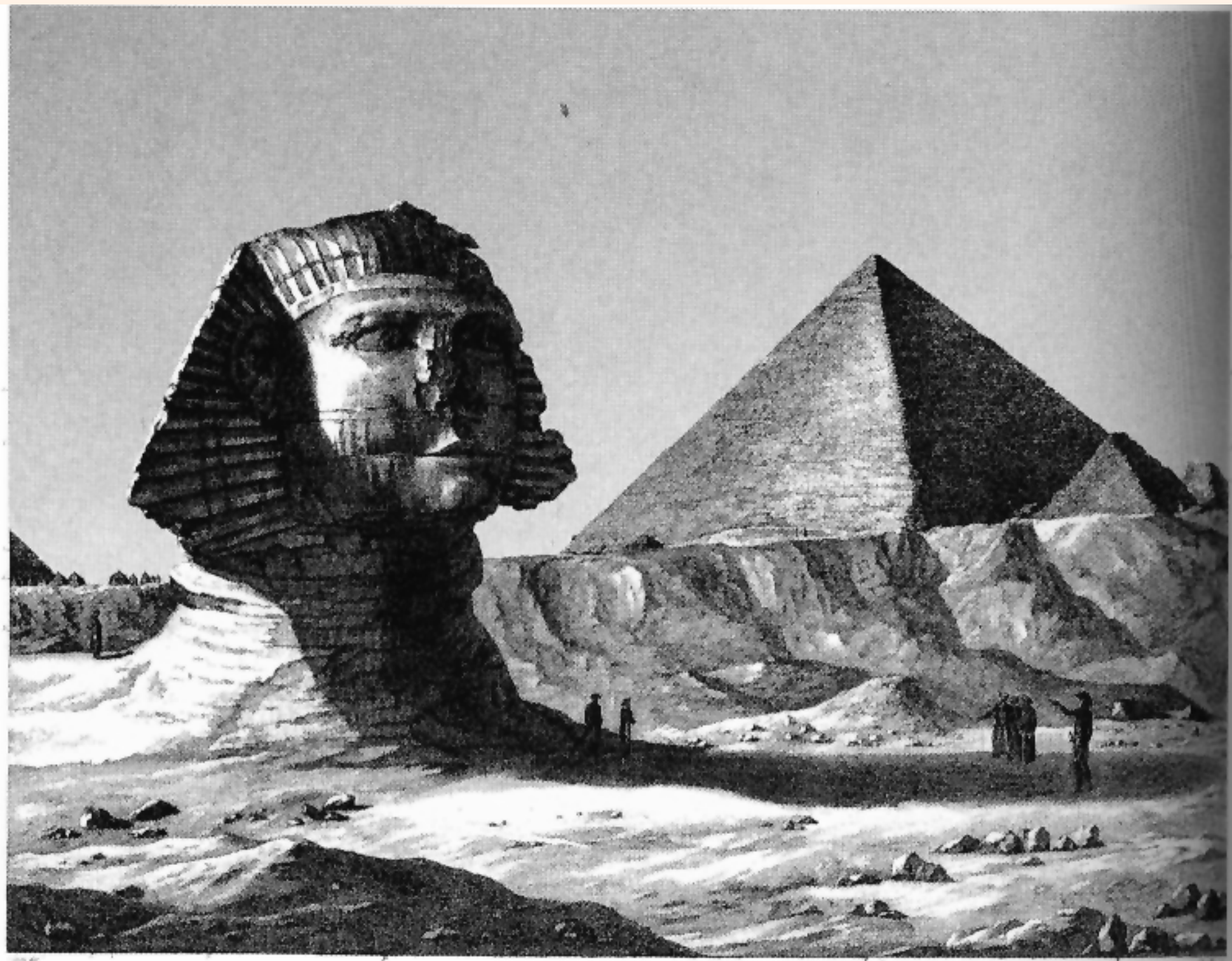
- Trockenlegung von Sümpfen

- Bau von Fernstraßen nach Italien

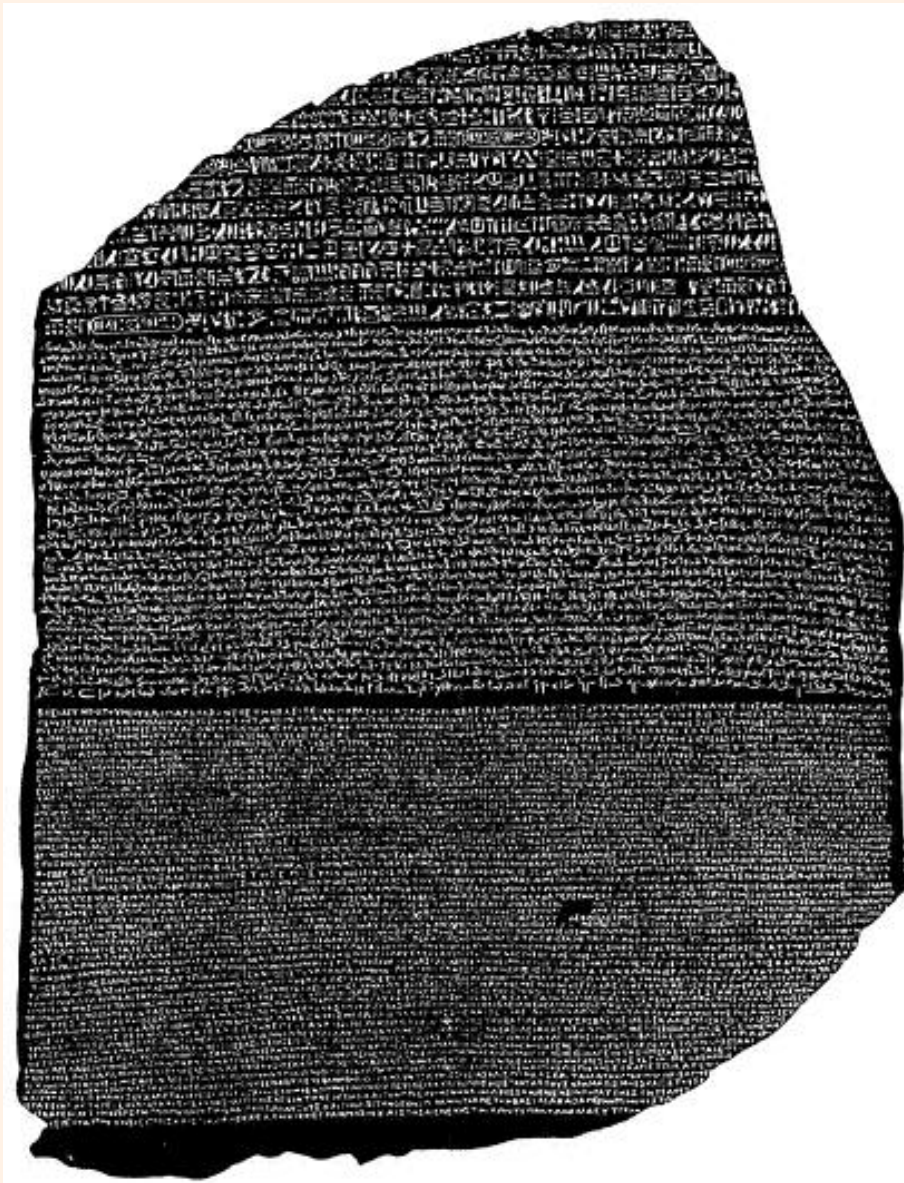
1817 Mitglied der Académie des Sciences

1822 Secrétaire perpétuel

**1822 „Théorie analytique de la Chaleur“**







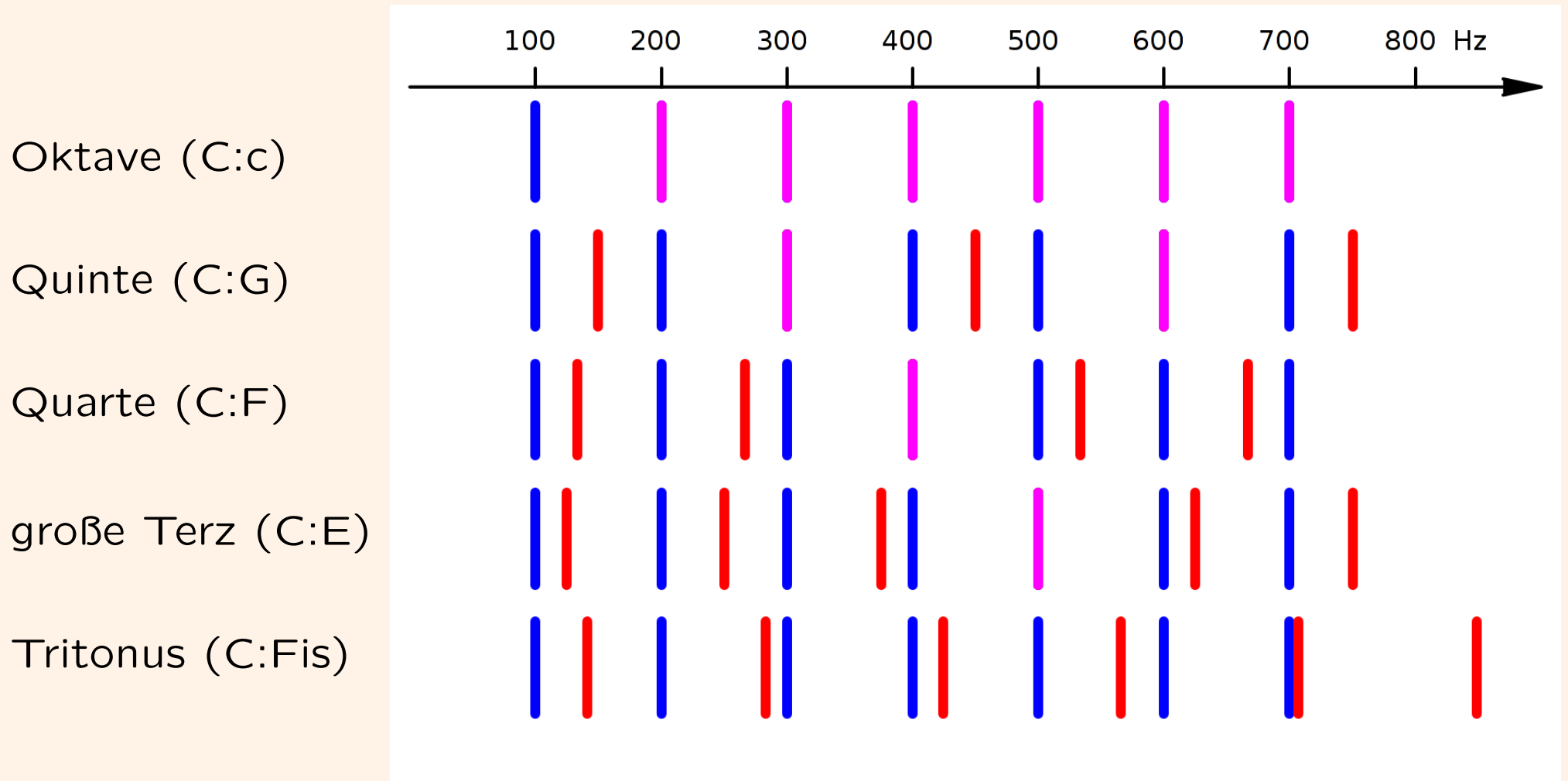
Jean-François Champollion

\* 23.12.1790 † 4.3.1832

entziffert die Hieroglyphen

# Noch einmal: Konsonanz von Intervallen

nach Hermann von Helmholtz



# Noch einmal: Konsonanz von Intervallen

nach Hermann von Helmholtz

